Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Matemática 2 de Honor. Enero-Marzo 2014.

Problemario 1

Los siguientes ejercicios desarrollan algunas propiedades que nos serán útiles más adelante.

(1) Sea $f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x$ un polinomio de grado n. Demuestre cada uno de los siguientes apartados:

(a) Si $n \geq 1$ y $f(0) = 0$, entonces $f(x) = xg(x)$ para algún polinomio $g(x)$ de grado $n-1$.

(b) Para cada $a \in \mathbb{R}$, $p(x) = f(x+a)$ es un polinomio de grado n.

(c) Si $n \geq 1$ y $f(a) = 0$, entonces $f(x) = (x-a)g(x)$ para algún polinomio $g(x)$ de grado $n-1$.

(d) Si asumimos que $f(x)$ es un polinomio de la forma dada arriba (no necesariamente de grado n) pero $f(x) = 0$ para $n+1$ valores distintos de x, entonces $c_k = 0$ para todo $0 \leq k \leq n$ y $f(x)$ es el polinomio idénticamente cero.

(2) Halle todos los polinomios $p(x)$ de grado menor o igual a 2 que satisfacen:

(a) $p(x) = p(1-x)$.

(b) $p(x) = p(1+x)$.

(c) $p(2x) = 2p(x)$.

(d) $p(3x) = p(x+3)$.

(3) Verifique que las expresiones siguientes son polinomios hallando una expresión de la forma $f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x$ para cada una de ellas:

(a) $f(x) = (1+x)^{2n}$

(b)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x} & x \neq 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$$

(c) $f(x) = \prod_{k=1}^{n}(1+x^{2^k})$

Si $f'(x) = g(x)$ decimos que f es una *antiderivada o primitiva* de $g(x)$.

(4) Halle la primitiva f de cada una de las siguientes funciones g que satisface la condición dada:

(a) $g(x) = 5x^2,\ f(0) = 3.$

(b) $g(x) = \dfrac{x^4 + x - 3}{x^3},\ f(1) = 1.$

(c) $g(x) = (1 + \sqrt{x})^2,\ f(0) = 1.$

(d) $g(x) = \dfrac{2x^2 - 6x + 7}{2\sqrt{x}},\ f(1) = -1.$

(e) $g(x) = 3\text{sen}(x) + 2x^5,\ f(\pi) = 1.$

(5) Verifique que la función $g(x) = 1/x$ no puede ser la derivada de ninguna función racional.